

# 数学模型论文

## 男生竞争女生好感的数学模型分析

华侨大学数学系

杨懂存

**摘要** 本文针对竞争中“强者愈强”的马太效应的特点，构建了男生竞争女生的好感模型；然后利用常微分方程的知识对二维的特殊情形进行了定性分析和仿真，并仿真分析了模型中的有关参数对系统的作用。然后针对分析结果讨论了影响两个男生在一定量女生中拥有的好感程度的主导因素。

**关键词** 竞争模型 常微分方程 定性分析

## 一 . 前言

市场经济中有一条“正反馈循环”规律，也就是比尔·盖茨在其《未来之路》中津津乐道的正螺旋效应，即“好的越好，而糟的越糟”，导致“赢家通吃”，这是类似于生态系统中种群竞争的一种模型。

人类社会生活中这样的情况也是屡见不鲜，本文以两个男生竞争一定量女生的好感为例，从数学上给出一点解释。

## 二 . 男生间魅力的竞争模型

我们来考虑多个男生之间的竞争之间竞争的数学模型。假定有  $n$  个男生有着相似的条件，竞争比男生数量多的一定量的女生的好感。设  $x_i$  表示  $i$  男生在特定女生群中的好感度，等于看好  $i$  男生的女生人数除以所有看好这  $n$  个男生的女生总数  $m$ 。 $x_i$  由两个主要因素决定。当无其他男生竞争时， $x_i$  在刚开始以指数型增长，最终达到其最大容量  $\beta_i$ ，其中  $\alpha_i$  为固定增长系数。当有其他男生竞争时，假设每个女生看好一个男生的概率独立于看好另一个男生的概率，即呈现独立分布，因此  $x_i x_j$  就是同时看好男生  $i$  和男生  $j$  的女生的比率。由于男生  $i$  和男生  $j$  条件相同，有些女生以后可能只对其中某一个男生有好感而对另外一个的好感消失，因此有  $p_{ij}(x_i, x_j) x_i x_j$  表示从对  $i$  男生有好感转移到对  $j$  男生有好感的女生的比例。其中  $p_{ij}(x_i, x_j) = \gamma_{ij}(1 + \omega_{ij}(x_j - x_i))$ ， $\gamma_{ij}$  是转移常数， $0 < \omega_{ij} < \gamma_{ij}$ 。 $p_{ij}(x_i, x_j)$  表示女生对一个男生的好感转移到另外一个男生同这两个男生各自拥有的女生的好感的多少有关，女生从拥有女生好感多的男生转移到拥有女生好感少的男生的人数相对要少，反之，转移要多。这就是市场经济的“强者愈强”的马太效应。同理有  $p_{ji}(x_i, x_j) x_i x_j$ ， $p_{ji}(x_i, x_j) = \gamma_{ji}(1 + \omega_{ji}(x_j - x_i))$ 。 $\gamma_{ij}$ 、 $\gamma_{ji}$  可以不同。于是，相关的数学模型为：

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i (\beta_i - x_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \gamma_{ij} (1 + \omega_{ij} (x_j - x_i)) x_i x_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

其中， $\alpha_i > 0$ ， $1 > \beta_i > 0$ ， $0 < \omega_{ij} < \gamma_{ij}$ 。

方程组(1)描述了多个男生之间竞争情况，在这个模型中有两个前提性条件：一是供大于求，这是由于男生得到女生的好感的边际成本几乎为零，并且男生对自身条件提高的投资只是在前期投入较大成本，而以后随女生对其好感的增加和自身条件的提高而增加的软、硬件成本都相对较低，因此男生总能也愿意通过较少的投资来满足女生的喜好。二是男生总有办法吸引一定量女生对自己产生好感（可能这个“一定量”并不是女生真的喜欢上该男生，只是对这男生有一定量的好感。）这两个条件毫无疑问都是可以达到的。

动态竞争模型：

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i (\beta_i - x_i) - \sum_{i \neq j} \gamma_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

模型 (1) 同模型 (2) 相比, 增加了  $\omega(x_j - x_i)$  项, 其作用是体现男生的“强者更强”的特性。

对男生魅力竞争模型 (1), 我们先从各系数相同即各男生条件相同这种较简单的情形进行分析。此时  $\alpha = \alpha_i, \beta = \beta_i, \omega = \omega_{ij}, \gamma = \gamma_{ij}, (i, j = 1, \dots, n)$ 。模型 (1) 变为

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha x_i (\beta - x_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \gamma (1 + \omega(x_j - x_i)) x_i x_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

其中,  $\alpha > 0, 1 > \beta > 0, 0 < \omega < \gamma, x_i \geq 0$ 。

### 三. 两个男生之间的竞争情况

我们先分析一种简单的情况——两个相同条件男生的竞争情况, 此时模型为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 (\beta - x_1) - \gamma (1 + \omega(x_2 - x_1)) x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_2 (\beta - x_2) - \gamma (1 + \omega(x_1 - x_2)) x_1 x_2 \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $\alpha > 0, 1 > \beta > 0, 0 < \omega < \gamma, x_i \geq 0$ 。

由模型要求  $x_i \geq 0$ , 只考虑第一象限的情况。方程 (4) 的奇点为 A (0, 0)、B ( $\beta, 0$ )、

C(0,  $\beta$ )、D ( $\frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma}, \frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma}$ )、E (u, v)、F (v, u) 其中:

$$u = \frac{\alpha - \gamma + \sqrt{-\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\omega}}{2\gamma\omega}, \quad v = \frac{\alpha - \gamma - \sqrt{-\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\omega}}{2\gamma\omega} \quad (5)$$

首先看 u、v 的存在性: 因  $\alpha > 0$ , 当  $-\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\omega \geq 0$  时, u、v 为实数, 即有

$0 < \alpha/\gamma \leq \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$ 。交点 A、B、C、D 均在第一象限, E、F 也在第一象限的条件为:

$$\frac{\alpha - \gamma + \sqrt{-\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\omega}}{2\gamma\omega} \geq 0, \quad \text{并且} \quad \frac{\alpha - \gamma - \sqrt{-\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\omega}}{2\gamma\omega} \geq 0, \quad \text{并且}$$

$0 < \alpha/\gamma \leq \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$ , 即得条件  $\alpha/\gamma > (1 + \beta\omega)$ 。

下面分析各奇点的稳定性。奇点的稳定性可通过下面的行列式对应的特征值进行分析。

$$J = \begin{pmatrix} \alpha\beta - 2\alpha x_1^0 - \gamma x_2^0 (1 + \omega(x_2^0 - x_1^0)) + \gamma\omega x_1^0 x_2^0 \cdots \cdots \cdots - \gamma x_1^0 (1 + \omega(x_2^0 - x_1^0)) - \gamma\omega x_1^0 x_2^0 \\ -\gamma x_2^0 (1 + \omega(x_1^0 - x_2^0)) - \gamma\omega x_1^0 x_2^0 \cdots \cdots \cdots \alpha\beta - 2\alpha x_2^0 - \gamma x_1^0 (1 + \omega(x_1^0 - x_2^0)) + \gamma\omega x_1^0 x_2^0 \end{pmatrix}$$

( $x_1^0, x_2^0$ ) 分别为 A、B、C、D、E、F。

- 对于 A 点, 其特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha\beta > 0$ , 因此 A 为不稳定结点。

- 对于 B、C，其对应的特征值为  $\lambda_1 = -\alpha\beta$ ， $\lambda_2 = \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\omega\beta^2$ 。因此，当  $\lambda_2 > 0$ ，即  $\alpha/\gamma > (1 + \omega\beta)$  时，B、C 均为鞍点；当  $\lambda_2 < 0$ ，即  $0 < \alpha/\gamma < (1 + \omega\beta)$  时，B、C 为稳定结点。

- 对于 D 点，其对应的特征值为  $\lambda_2 = \frac{\alpha\beta(-\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\omega\gamma)}{(\alpha + \gamma)^2}$ ， $\lambda_1 = -\alpha\beta$ 。因此，当  $\lambda_2 > 0$ ，

即  $0 < \alpha/\gamma < \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$  时，D 为鞍点；当  $\lambda_2 < 0$ ，即  $\alpha/\gamma > \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$  时，

D 为稳定结点。

- 对于 E、F，其对应的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{2\gamma\omega} (\sqrt{4\alpha^3 + 4\gamma^3(1 + \beta\omega) - 4\alpha^2(\gamma + 3\beta\gamma\omega) + \alpha\gamma^2(-4 + 8\beta\omega + 9\beta^2\omega^2)})$$

只考虑 E、F 在第一象限的情况，因此当  $1 + \beta\omega < \alpha/\gamma < \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$  时， $\lambda_1 < 0$ 、 $\lambda_2 < 0$ ，E、F 为稳定结点。

根据以上分析，可得

系统 (4) (在第一象限中) 必有三个奇点 A (0, 0)、B ( $\beta$ , 0)、C(0,  $\beta$ )，其中，A (0, 0) 为不稳定结点 (源点)。此外

- 1)  $1 + \beta\omega < \alpha/\gamma < \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$  时，系统尚有 3 个奇点 D ( $\alpha\beta/(\alpha + \gamma)$ ,  $\alpha\beta/(\alpha + \gamma)$ )、E (u, v)、F (v, u)，其中 B、C、D 为鞍点，E、F 为稳定结点。如图 1 (a) 所示。在稳定结点附近的局部放大图如图 1 (b) 所示。
- 2)  $0 < \alpha/\gamma < (1 + \omega\beta)$  时，系统尚有 1 个奇点 D ( $\alpha\beta/(\alpha + \gamma)$ ,  $\alpha\beta/(\alpha + \gamma)$ )，其中 B、C 为稳定结点，D 为鞍点。如图 2 (a) 所示。
- 3)  $\alpha/\gamma > \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$  时，系统尚有 1 个奇点 D ( $\alpha\beta/(\alpha + \gamma)$ ,  $\alpha\beta/(\alpha + \gamma)$ )，其中 B、C 为鞍点，D 为稳定结点。如图 2 (b) 所示

前面我们分析了系统 (4) 的线性奇点在第一象限的定性和稳定性情况，由于有关线性奇点均属非临界情形，系统 (4) 在奇点邻域的稳定性态保持不变。从而可得

系统 (4) 在第一象限中的轨线图貌，有

- 1)  $1 + \beta\omega < \alpha/\gamma < \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$  时，在第一象限内的轨线趋于 E 或 F 点，视其初值 ( $x_1^0, x_2^0$ ) 中  $x_1^0 > x_2^0 > 0$  或  $0 < x_1^0 < x_2^0$  而定。而当  $x_1^0 = 0$  或  $x_2^0 = 0$  时其轨线则趋于 C 或 B 点。当  $x_1^0 = x_2^0 > 0$  时其轨线则趋于 D 点。
- 2)  $0 < \alpha/\gamma < (1 + \omega\beta)$  时，在第一象限中的轨线趋于 B 或 C 点，视其初值 ( $x_1^0, x_2^0$ ) 中  $x_1^0 > x_2^0 \geq 0$  或  $0 \leq x_1^0 < x_2^0$  而定。而当  $x_1^0 = x_2^0 > 0$  时其轨线则趋于 D 点。

3)  $\alpha/\gamma > \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$  时, 在第一象限内的轨线均趋于 D 点。而当  $x_1^0 = 0$  或  $x_2^0 = 0$  时其轨线则趋于 C 或 B 点。

极限环存在情况分析:

系统在第一象限对应 4 条等倾线:  $l_3 : x_1 = 0$ ;  $l_4 : x_2 = 0$ ;

$l_1 : \alpha(\beta - x_1) - \gamma[1 + \omega(x_2 - x_1)]x_2 = 0$ ;  $l_2 : \alpha(\beta - x_2) - \gamma[1 + \omega(x_1 - x_2)]x_1 = 0$ ; 由前面分析可知, 参数不同取值, 等倾线交点不同, 下面我们根据具体取值进行分析。

1.  $1 + \beta\omega < \alpha/\gamma < \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$  时, 等倾线  $l_1$ 、 $l_2$  有 3 个交点, 如图 1 (a) 所示, 由线段 AB、BN、NG、GD、DA 构成一个包围奇点 E 的闭区域。

线段 AB 上, 即直线  $l_3 : x_1 = 0$  上 ( $0 < x_2 < \beta$ )  $dx_1/dt = 0$ ,  $dx_2/dt = \alpha x_2(\beta - x_2) > 0$

线段 BN 上, 即直线  $x_2 = \beta$  ( $0 < x_1 < \beta - \frac{\beta\gamma}{\alpha - \gamma\omega\beta}$ ) 上:  $dx_1/dt > 0$ ,

$dx_2/dt = -\gamma[1 + \omega(x_1 - x_2)]x_1x_2 < 0$ 。

线段 NG 上, 即直线  $x_2 = \beta$ , ( $\beta - \frac{\beta\gamma}{\alpha - \gamma\omega\beta} < x_1 < \beta$ ) 上:  $dx_1/dt < 0$ ,  $dx_2/dt < 0$ 。

线段 GD 上, 即直线  $x_1 = x_2$  ( $\frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma} < x_1 < \beta$ ) 上:  $dx_1/dt < 0$ ,  $dx_2/dt < 0$ 。

线段 AD 上, 即直线  $x_1 = x_2$  ( $0 < x_1 < \frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma}$ ) 上:  $dx_1/dt > 0$ ,  $dx_2/dt > 0$ 。

曲线段 DE, 上曲线, 即  $l_2 : \alpha(\beta - x_2) - \gamma[1 + \omega(x_1 - x_2)]x_1 = 0$  ( $v < x_1 < \frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma}$ ) 上:

$dx_2/dt = 0$ ,  $dx_1/dt < 0$ 。

曲线段 DE, 下曲线, 即  $l_1 : \alpha(\beta - x_1) - \gamma[1 + \omega(x_2 - x_1)]x_2 = 0$  ( $v < x_1 < \frac{\alpha\beta}{\alpha + \gamma}$ ) 上:

$dx_1/dt = 0$ ,  $dx_2/dt > 0$ 。

曲线段 BE 上, 即  $l_2 : \alpha(\beta - x_2) - \gamma[1 + \omega(x_1 - x_2)]x_1 = 0$  ( $0 < x_1 < v$ ) 上:  $dx_2/dt = 0$ ,

$dx_1/dt > 0$ 。

曲线段 ME 上, 即  $l_1: \alpha(\beta - x_1) - \gamma[1 + \omega(x_2 - x_1)]x_2 = 0$  ( $\beta - \frac{\gamma\beta}{\alpha - \gamma\beta\omega} < x_1 < v$ )

上:  $dx_1/dt = 0, dx_2/dt < 0$ 。

边界及曲线上的轨线走向如图 1 (a) 箭头所示, 由以上分析可知, 由线段 AB、BN、NG、GD、DA 构成包围奇点 E 的闭区域, 当 t 增加时, 除线段 AB 上的轨线指向点 B 之外, 其余方向全指向区域内部; 而奇点 E 是一个稳定结点, 因此在此区域无极限环。

包围奇点 F、D、A、B、C 的区域轨线的走向分析同上, 我们就不再详细写出, 各边界及曲线上的轨线走向如图 1 (a) 箭头所示。可知在此范围内, 系统无极限环存在, 并且有稳定结点 E、F, 因此, 系统是全局稳定的, 稳定于结点 E (u, v)、F (v, u) (u、v 取值同 (5) 式)。

2.  $0 < \alpha/\gamma < (1 + \omega\beta)$  时分析同上, 轨线走向如图 2 (a) 所示。并且可知, 此时, 系统无极限环, 并且是全局稳定的, 根据初始取值的不同稳定于结点 B (0,  $\beta$ ) 或 C ( $\beta, 0$ )。

3.  $\alpha/\gamma > \beta\omega + \sqrt{\beta^2\omega^2 + 1}$  时分析同 1. 轨线走向如图 2 (b) 所示, 并且可知, 此时系统无极限环, 并且全局稳定, 稳定于结点 D ( $\alpha\beta/(\alpha + \gamma), \alpha\beta/(\alpha + \gamma)$ )

由此可得:

在所有可能参数范围内, 系统 (1) 在第一象限不存在极限环, 并且区域内有稳定结点, 因此系统是全局稳定的。根据不同的初始值, 稳定于不同结点。

我们用 MatLab 对不同取值的  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\omega$  进行了模拟仿真, 系统的相图如图 1—图 2 所示。

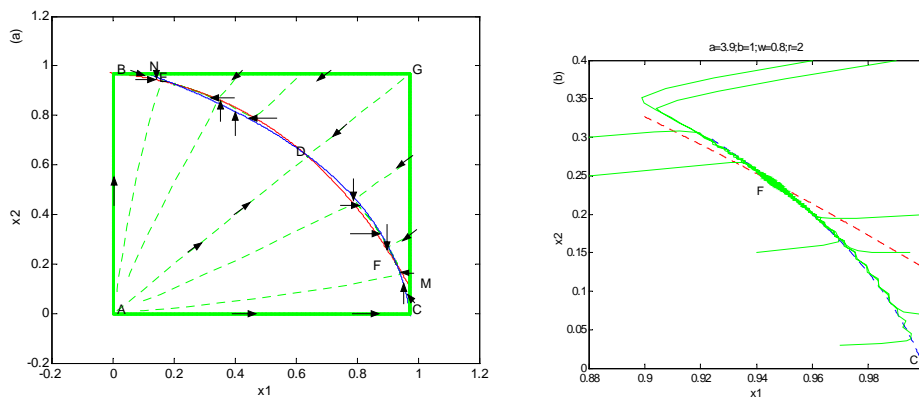


图 1: 系统有 6 个奇点, (a) 为 6 个奇点的图貌, (b) 是 (a) 经过放大后的局部图 (图中箭头表示轨线走向)

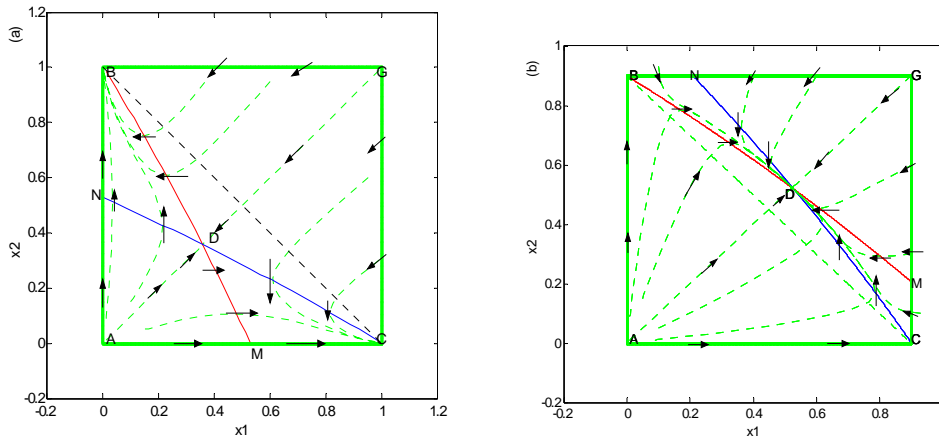


图 2: 系统有 4 个奇点时, (a) 为当系统同时有两个稳定结点 B、C, (b) 为系统仅一个稳定结点 D (图中箭头代表轨线走向)

#### 四. 结论

我们首先分析相图上的一些特征:

- 图 1—图 2 中各曲线的稳定结点代表系统相对稳定后的两个男生所拥有的好感度.
- 一个女生可以同时两个男生产生好感, 当系统稳定时两个男生拥有的共同对自己有好感的女生所有女生中的比例也间接说明了竞争的激烈程度, 当对两个男生都有好感的女生多时说明竞争相对较为平缓. 表现在相图中  $x_1 + x_2$  的值. 图中的 BC 直线即为  $x_1 + x_2 = 1$ , 如果

稳定结点位于直线 BC 上方, 即  $x_1 + x_2 > 1$  说明对两个男生都有好感的女生多, 竞争平缓. 如图 1 和图 2 (b) 反之则说明竞争激烈.

- 系统参数的代表两个男生之间相对竞争的激烈程度. 由模型的实际含义, 我们知道,  $\alpha$  表示某个男生的自身条件增长系数,  $\gamma$  表示某个男生同其他男生之间的竞争激烈程度.

$\alpha/\gamma > 1 + \beta\omega$ , 表示男生自身的发展起主导作用, 竞争相对平缓. 如图 2 (b) 和图 1 (1)

所示. 反之,  $\alpha/\gamma < 1 + \beta\omega$  表示竞争比较激烈如图 2 (a).

- $\alpha/\gamma > 1 + \beta\omega$  时, 系统稳定后两个男生在女生中的受欢迎程度旗鼓相当, 但由于  $\omega$  的不同系统发展不同: 第一种, 不受初始值影响, 两个男生最后拥有的女生的好感程度相同, 如图 2 (b) 所示, 这是由于  $\omega$  的影响很小. 第二种, 受初始值的影响, 初始更受女生的男生最后拥有的女生的好感程度更高. 如图 1 (a) 所示, 以直线 ADC 为分界线, 当两个男生初始受女生的欢迎情况在左半平面时, 说明对男生 2 有好感的女生多, 在系统发展过程中对男生 2 有好感的女生数增加, 而对男生 1 有好感的女生数减少. 因此系统稳定于 E 点, 对男生 2 有好感的女生更多. 反之, 在直线 ADC 的右半平面, 男生 1 最后拥有绝大多数女生的好感. 这种情况充分体现了“强者更强”的特点.
- 另外也看出, “赢家通吃”是发生在竞争激烈情况, 如图 2 (a) 最后只有一个女生差不多都对一个男生有好感.

总之，对于相同 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\omega$ 的情况，最初对男生有好感的女生量的不同决定最终女生对其的好感程度，而最初对男生有好感的女生量的提高在于男生的吸引力；对于相同初始值情况下， $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\omega$ 的不同取值导致最后的发展结果不同，因此，对于每一个男生来说，采用什么策略，通过什么方法提高自身的发展即提高 $\alpha$ 或是竞争能力，是决定最终女生对其的好感程度的关键。男生必须通过提高自身的素质、地位等来增强自身条件的增长率，当然，自身增长率的提高间接导致竞争能力的增强。

对于三个乃至多个男生竞争时，情况同两个男生时相似，但竞争更为激烈。另外，系统趋向的复杂度大大提高，边界上的点趋向大致同两个男生时相似，空间的趋向要复杂很多。

### 参考文献

1. 陈守明，网络经济中的“赢家通吃”现象与企业对策.经营管理.2000.
2. 贲金锋 郑维敏.市场经济中的正反馈机制研究.系统工程理论与实践.1997.6
3. 张芷芬等，微分方程定性理论，科学出版社.
4. 叶彦谦 极限环论，科学出版社